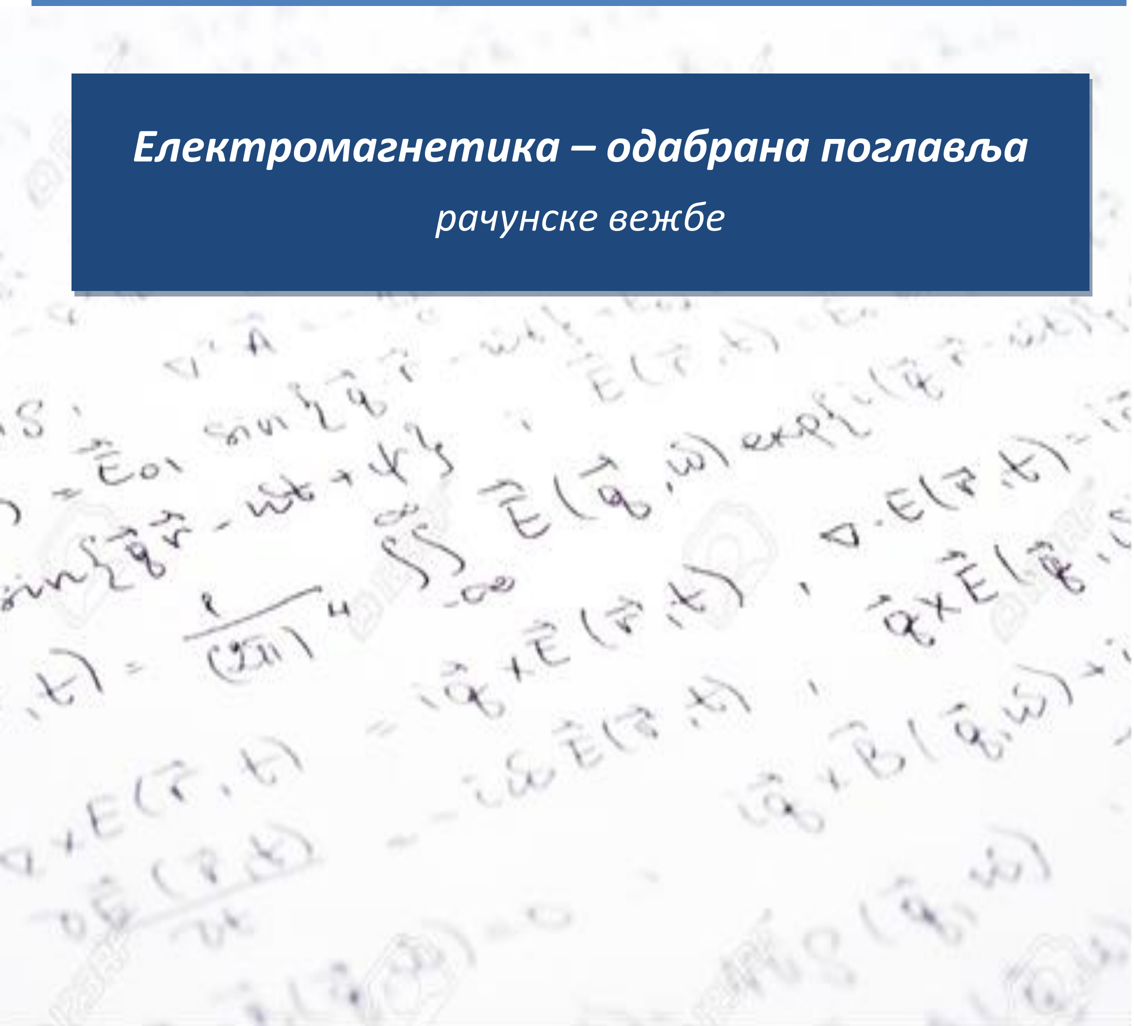
Универзитет у Нишу
Електронски факултет у Нишу
Катедра за теоријску електротехнику

Електромагнетика – одабрана поглавља

рачунске вежбе



Предметни професор: др Небојша Раичевић
e-mail: nebojsa.raicevic@elfak.ni.ac.rs

Предметни асистент: др Мирјана Перић
e-mail: mirjana.peric@elfak.ni.ac.rs

web: http://em.elfak.ni.ac.rs

Ниш, 2017/18

Рачунске вежбе из Електромагнетике – одабрана поглавља
- Оквирни план рада -

Број недеље	**Датум**	**Програм**
1	19.02.2018.	Увод – Максвелове једначине и њихова примена (обнављање градива из ОЕ1 и ОЕ2)
2	26.02.2018.	Закривљени координатни системи Оператори просторног диференцирања Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена
3	05.03.2018.	Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена Једначина континуитета
4	12.03.2018.	Простопериодични вектори Комплексни вектори
5	19.03.2018.	Гранични услови Електромагнетне особине средина
6	02.04.2018.	Електромагнетне особине средина Поинтингова теорема
	14.04.2018.	**Први колоквијум (предлог)**
7	16.04.2018.	Потенцијали у закашњењу
8	23.04.2018.	Теорема лика у равном огледалу
9	30.04.2018.	Модификована теорема лика Теорема лика у цилиндричном огледалу
10	07.05.2018.	Теорема лика у цилиндричном огледалу Конформна пресликавања
11	14.05.2018.	Конформна пресликавања Лапласова једначина
12	21.05.2018.	Лапласова и Пуасонова једначина
13	28.05.2018.	Равански таласи
14	04.06.2018.	Френелови коефицијенти
	09.06.2018.	**Други колоквијум (предлог)**

Прва недеља - Увод

►Максвелове једначине и њихова примена (обнављање градива из Основа електротехнике)

Задатак 1
Одредити јачину електричног поља, електричну индукцију и потенцијал у околини:
а) усамљеног тачкастог сталног наелектрисања Q;
б) правог неограниченог линијског наелектрисања сталне подужне густине наелектрисања q'.

Задатак 2
Одредити јачину магнетног поља и магнетну индукцију у околини правог и дугог линеичног проводника оптицаног струјом I.

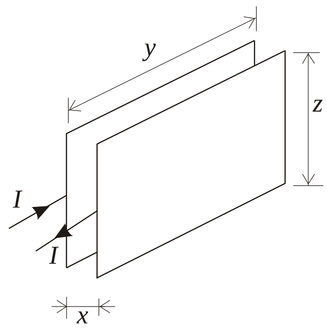
Задатак 3
Одредити електрично поље неограничене равни оптерећене равномерно по површини наелектрисањем сталне површинске густине η.

Задатак 4
Одредити електрично поље две паралелне неограничене равни оптерећене равномерно по површини наелектрисањима исте површинске густине η, али супротног знака.

Задатак 5
Неограничена раван оптицана је сталном струјом површинске густине J_S. Одредити јачину магнетног поља у околини равни.

Задатак 6

Кроз паралелне проводне траке протиче струја I истог интензитета али супротног смера сталне површинске густине J_S. Одредити магнетну енергију између трака ($x \ll y, z$), Сл.6.



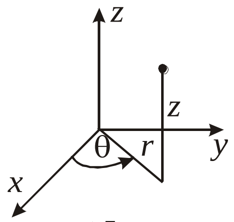
Сл.6

Друга недеља - Увод

- ► Закривљени координатни системи
- ► Оператори просторног диференцирања
- ► Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена

Закривљени координатни системи
Вредности Ламеових коефицијената:
а) правоугли систем ($u = x$, $v = y$, $w = z$): $h_x = h_y = h_z = 1$;

б) цилиндрични систем ($u=r$, $v=\theta$, $w=z$):

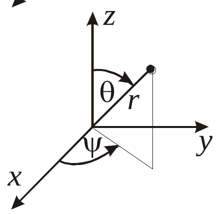


$h_r = 1,$

$h_\theta = r,$

$h_z = 1$;

в) сферни систем ($u=r$, $v=\theta$, $w=\psi$):



$h_r = 1,$

$h_\theta = r,$

$h_\psi = r\sin\theta$.

Оператори просторног диференцирања

а) **градијент**, примењује се на скаларну функцију и даје векторску величину и одређује као:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{h_u\partial u}\hat{u} + \frac{\partial\varphi}{h_v\partial v}\hat{v} + \frac{\partial\varphi}{h_w\partial w}\hat{w};$$

б) **дивергенција**, примењује се на векторску функцију и даје скалар.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v A_w)\right];$$

в) **ротор**, примењује се на векторску функцију и даје вектор

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix};$$

г) **Лапласијан скалар**, примењује се на скаларну функцију и даје скалар

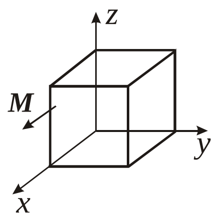
$$\Delta\varphi = \mathrm{divgrad}\,\varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right];$$

д) **Лапласијан вектор**, примењује се на векторску функцију и даје вектор

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mathrm{rotrot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{graddiv}\,\boldsymbol{A}.$$

Задатак 7

Коцка израђена од феромагнетног материјала дужине странице a налази се у ваздуху, Сл.1. Вектор густине магнетног момента $\boldsymbol{M}$ у коцки је $\boldsymbol{M} = M_0\dfrac{z}{a}\hat{x}$. Одредити расподелу Амперових струја коцке.



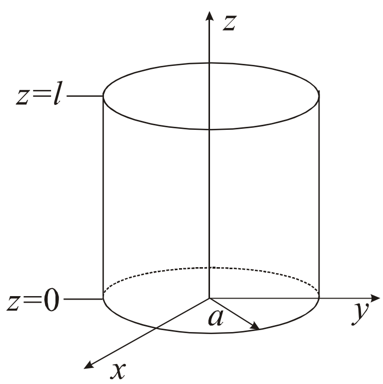
Сл.1

Задатак 8

У ваљку од диелектрика полупречника a и висине l који се налази у вакууму (Сл.2), постоји заостала поларизација, при чему је вектор поларизације:

$$\vec{P} = P_0\left[\frac{r^2}{a^2}\hat{r} + \left(1+\frac{r}{a}\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(l\frac{r}{a^2}\cos\theta\right)\hat{z}\right],\ P_0 = \mathrm{const}.$$

Одредити расподелу запреминског и површинског везаног наелектрисања ваљка.



Сл.2

Трећа недеља - Једначина континуитета

- Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена
- Једначина континуитета

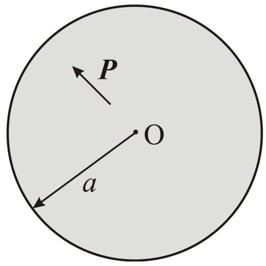
Задатак 9

1. У лопти од диелектрика полупречника a, Сл. 1, постоји заостала поларизација. Вектор поларизације је дат изразом:

$$\boldsymbol{P} = P_0 \frac{r}{a} \hat{r},$$

где је P_0 константа, а r је растојање од центра лопте. Са $\hat{r}$ је обележен јединични вектор у радијалном правцу сферног координатног система чији је почетак у центру лопте. Лопта се налази у ваздуху.

Одредити расподелу запреминског и површинског везаног наелектрисања лопте.



Сл.1

Задатак 10

Сферни кондензатор полупречника електрода a и b, испуњен је диелектриком специфичне проводности $\sigma(\theta,\psi) = \sigma_0(2+\sin\psi)\sin\theta$. Одредити проводност кондензатора.

Задатак 11

Коаксијални кабл полупречника проводника a и b ($a<b$) и дужине L испуњен је несавршеним диелектриком $(\varepsilon_0, \mu_0, \sigma \neq 0)$ при чему је $\sigma(z) = \sigma_0 \frac{z}{a} \exp\left(\frac{z^2}{L^2}\right)$, где је $\sigma_0 = \text{const}$ и $0 \le z \le L$. Кабл је на једном крају прикључен на идеални генератор U, а на другом крају је отворен. Одредити подужну проводност кабла и расподелу струје у диелектрику.

Четврта недеља - Простопериодични вектори

- Простопериодични вектори
- Комплексни вектори

Простопериодичне векторске величине

Простопериодична векторска величина је вектор чије су све три компоненте простопериодичне величине исте учестаности, али у општем случају, различитих ефективних вредности и различитих почетних фаза:

$$\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y} + a_z(t)\hat{z}$$

$a_x(t) = A_x\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_x)$;

$a_y(t) = A_y\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_y)$;

$a_z(t) = A_z\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_z)$.

Интензитет вектора $\boldsymbol{a}(t)$ је $|\boldsymbol{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}$.

Ефективна вредност вектора је $A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t))\mathrm{d}t} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

Комплексни вектори

$\underline{A}_x = A_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_x}$; $\underline{A}_y = A_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_y}$; $\underline{A}_z = A_z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_z}$

$\underline{\boldsymbol{A}} = \underline{A}_x\hat{x} + \underline{A}_y\hat{y} + \underline{A}_z\hat{z}$

Вектор у општем случају мења интензитет, правац и смер. У општем случају се каже да је вектор (односно поље које тај вектор описује) елиптички поларизован. Уколико је тренутни интензитет вектора $\boldsymbol{a}(t)$ константан, а вектор мења само правац и смер, каже се да је вектор кружно поларизован. Уколико је правац вектора $\boldsymbol{a}(t)$ константан, док вектор мења интензитет и смер, каже се да је вектор линијски поларизован.

Задатак 12

За комплексни представник вектора простопериодичног електричног поља $\boldsymbol{E}(t)$,

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \mathrm{j}4\hat{x} + 5\hat{y} + \mathrm{j}3\hat{z}$$

одредити тренутну вредност, минималну и максималну вредност, и поларизацију вектора $\boldsymbol{E}(t)$.

Задатак 13

Одредити тренутну, максималну и ефективну вредност комплексног вектора датог изразом $\underline{\boldsymbol{A}} = \mathrm{j}\sqrt{8}\hat{x} + \mathrm{j}\sqrt{2}\hat{y} + \mathrm{j}2\hat{z}$. Како је вектор поларизован?

Задатак 14

Комплексни представник вектора јачне електричног поља, $\boldsymbol{E}(t)$, је

$$\underline{\boldsymbol{E}} = (4\hat{x} + \underline{\mathrm{K}}\hat{y} + 3\hat{z})\ \mathrm{V/m}.$$

а) Одредити комплексну константу $\underline{\mathrm{K}}$ тако да вектор $\underline{\boldsymbol{E}}$ буде кружно поларизован;

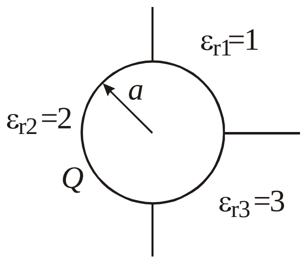
б) На основу одређене вредности константе $\underline{\mathrm{K}}$, израчунати максималну, минималну и ефективну вредност вектора $\underline{\boldsymbol{E}}$.

Пета недеља - Гранични услови и Електромагнетне особине средина

- Гранични услови
- Електромагнетне особине средина

Задатак 15

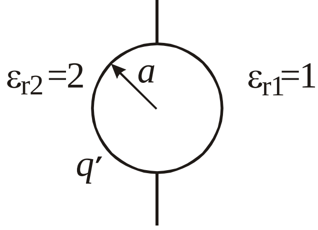
Метална лопта полупречника a, оптерећена слободним наелектрисањем Q, налази се у трослојној секторалној средини (Сл.1). Одредити потенцијал, јачину електричног поља у околини лопте, као и њену капацитивност.



Сл. 1

Задатак 16

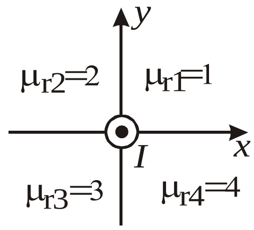
Метални цилиндар полупречника a оптерећен је сталним подужним наелектрисањем q' и налази се у двослојној средини (Сл.2). Одредити потенцијал и јачину електричног поља у околини цилиндра.



Сл. 2

Задатак 17

Неограничени проводник, кроз који протиче стална струја I, налази се у четворослојној секторалној средини, слика 3. Одредити јачину магнетног поља, магнетну индукцију и магнетни вектор потенцијал у околини проводника.



Сл. 3

Задатак 18

Извести израз за адмитансу кондензатора у коме се налази хомоген несавршен диелектрик диелектричне константе ε и специфичне проводности σ.

Задатак 19

Одредити резонантну учестаност редног LC кола када је средина у кондензатору нелинеарна у електричном смислу. Капацитивност кондензатора, када је у њему средина ваздух, износи C_0, а хистерезисна петља се може апроксимирати помоћу елипсе, тако да је $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1 - \mathrm{j}\varepsilon_2$.

Шеста недеља - Електромагнетне особине средина и Поинтингова теорема

- Електромагнетне особине средина
- Поинтингова теорема

Задатак 20

Одредити фактор доброте једнослојног соленоидног намотаја велике дужине d и кружног попречног пресека полупречника a ($a \ll d$), када је на соленоид густо и равномерно намотано N завојака танке жице и када је хистерезисна петља средине у соленоиду апроксимирана помоћу елипсе тако да је њена привидна магнетна пропустљивост комплексна облика $\underline{\mu} = \mu_1 - \mathrm{j}\mu_2$.

Задатак 21

На средини веома дугачког соленоида, кружног попречног пресека b и подужне густине навојака N', постављен је танак кружни диск полупречника a ($a < b$) и дебљине δ. Средина је ваздух, а струја кроз кабл

$$i(t) = \begin{cases} I_0\, \mathrm{e}^{-t/\tau}, & t \geq 0 \\ I_0, & t < 0 \end{cases}$$

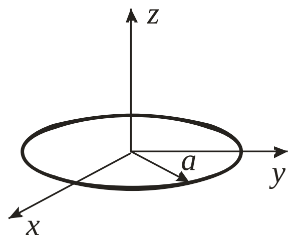
где су I_0 и τ позитивне константе. Диск је начињен од материјала специфичне проводности σ и пермеабилности μ_0. Занемарити магнетно поље индукованих струја. Одредити укупан рад који се претвори у топлоту у интервалу $t \in [0, \tau]$.

Седма недеља - Потенцијали у закашњењу

▶ Потенцијали у закашњењу

Задатак 22

Кроз танку проводну контуру полупречника a, протиче струја високе учестаности $i(t)=I_m \cos\omega t$, где је $I_m = \mathrm{const}$. Одредити подужну количину електрицитета на њој, комплексни електрични скалар и магнетни вектор потенцијал, векторе магнетне индукције и електричног поља дуж z-осе.

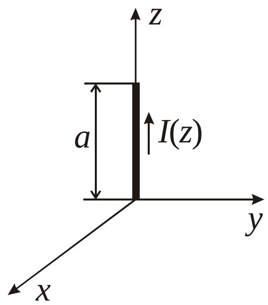


Задатак 23

Дуж проводне нити, дужине a, високофреквентна простопериодична струја се мења по закону

$$i(z,t)=\sqrt{2}\, I_0 \frac{a-z}{a}\cos(\omega t - k_0 z),$$

где је I_0 константа, $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и $0 \le z \le a$. Одредити комплексни представник задате струје $\underline{I}(z)$, расподелу наелектрисања дуж нити проводника и индуковано електрично поље дуж z-осе за $z > a$.



Осма недеља - Метод огледања

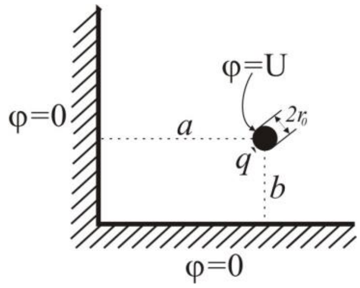
▶ Теорема лика у равном огледалу

Задатак 24

Одредити потенцијал који ствара стално подужно наелектрисање q' постављено на висини h паралелно површини проводне равни нултог потенцијала. Наћи његову капацитивност.

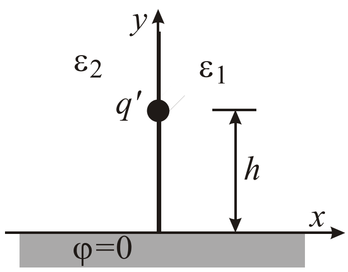
Задатак 25

Применом методе огледања одредити подужну капацитивност једножичног вода унутар угаоника попречног пресека приказаног на слици, под условом да је $a, b >> r_0$.



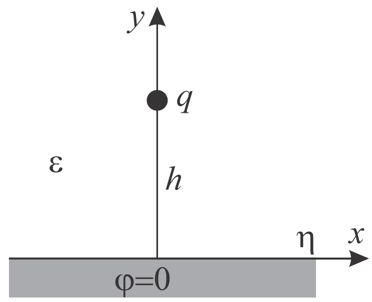
Задатак 26

Проводник оптерећен сталним наелектрисањем q' налази се у двослојној средини на висини h изнад савршено проводне неограничене равни. Проводна раван се налази на нултом потенцијалу. Одредити потенцијал и јачину електричног поља у његовој околини.



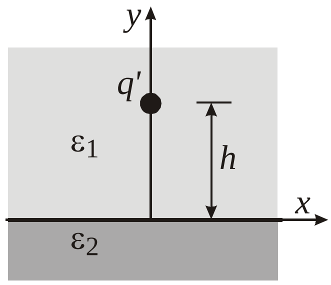
Задатак 27

Позитивно оптерећена честица наелектрисања q налази се на висини h изнад веома велике металне плоче нултог потенцијала. Ако је плоча оптерећена позитивним наелектрисањем сталне површинске густине η, одредити силу на честицу.



Девета недеља - Метод огледања

- Модификована теорема лика

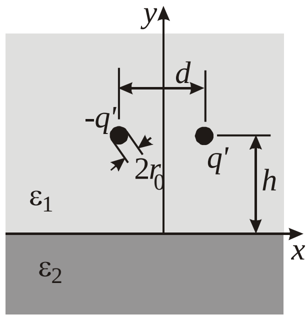


Задатак 28

Проводник оптерећен сталним наелектрисањем q' налази се у средини ε_1 на висини h изнад раздвојне површине. Одредити силу по јединици дужине која делује на проводник.

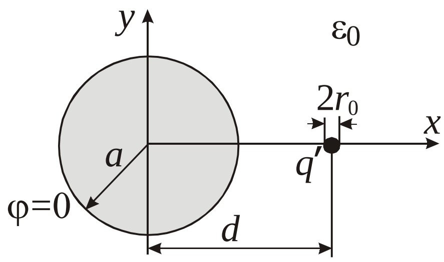
Задатак 29

Одредити подужну капацитивност двожичног вода постављеног у средини ε_1 на висини h изнад раздвојне површине два диелектрика.



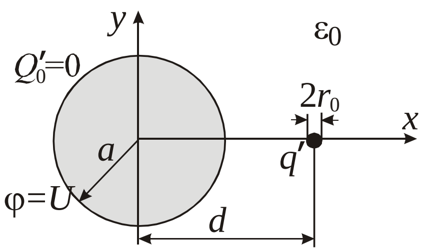
Задатак 30

Поред цилиндричног проводника велике дужине и кружног попречног пресека полупречника a, налази се стално подужно наелектрисање q' на растојању $d > a$. Цилиндар је на нултом потенцијалу, а систем се налази у ваздуху. Одредити потенцијал у околини цилиндра.



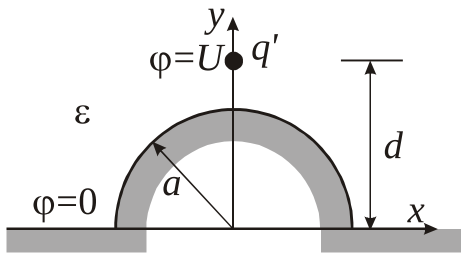
Десета недеља - Метод огледања

- Теорема лика у цилиндричном огледалу
- Конформна пресликавања



Задатак 31

Поред неутралног цилиндричног проводника велике дужине и кружног попречног пресека полупречника a, оптерећеног наелектрисањем $-q'$, налази се једножични вод на растојању $d > a$. Цилиндар је на потенцијалу $\varphi = U$, а систем се налази у ваздуху. Одредити капацитивност једножичног вода.



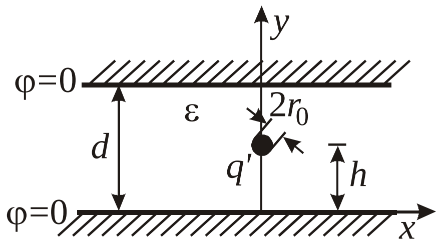
Задатак 32

Одредити подужну капацитивност једножичног вода, полупречника r_0 ($r_0 << a, d$), постављеног изнад проводне равни нултог потенцијала. На равни је полуцилиндрична избочина полупречника $a < d$.

Задатак 33
Користећи функцију комплексне променљиве

$$\underline{w} = \ln(\underline{z}/a)$$

одредити подужну капацитивност коаксијалног вода чији су проводници кружног попречног пресека полупречника a и b, $a < b$.



Задатак 34
Користећи функцију комплексне променљиве

$$\underline{w} = \mathrm{e}^{\pi \underline{z}/d}$$

одредити потенцијал у околини једножичног вода полупречника r_0 ($r_0 << d$), постављеног између две паралелне равни нултог потенцијала.

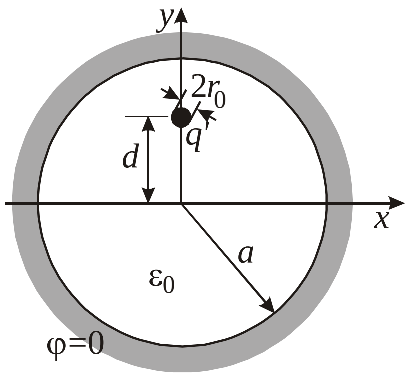
Једанаеста недеља - Конформна пресликавања и Лапласова једначина

- Конформна пресликавања
- Лапласова једначина

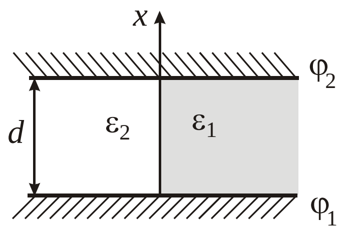
Задатак 35
Применом функције комплексне променљиве

$$\underline{w} = \frac{\underline{z} - \mathrm{j}a}{\mathrm{j}\underline{z} - a}$$

одредити подужну капацитивност вода са Слике ($r_0 << a, d$).

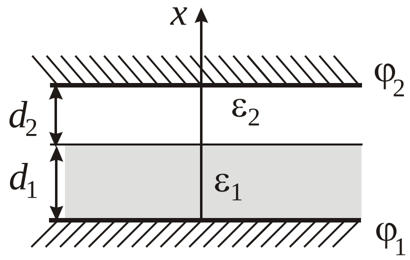


Задатак 36
Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у равном кондензатору са двослојном средином, Слика, када је ивични ефекат занемарив и електроде кондензатора на потенцијалима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = U$.



Задатак 37

Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у равном кондензатору са двослојном средином, Слика, када је ивични ефекат занемарив и електроде кондензатора на потенцијалима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = U$.



Дванаеста недеља - Лапласова и Пуасонова једначина

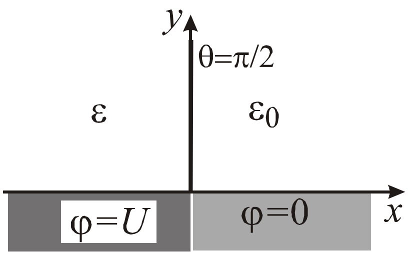
- Лапласова једначина
- Пуасонова једначина

Задатак 38

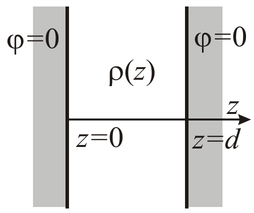
Унутрашњи проводник коаксијалног кабла, полупречника a, налази се на потенцијалу нула, а спољашњи проводник, полупречника b, на потенцијалу U. Одредити расподелу потенцијала и вектора јачине електричног поља у каблу, полазећи од Лапласове једначине.

Задатак 39

Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал и јачину електричног поља за систем са Слике.



Задатак 40



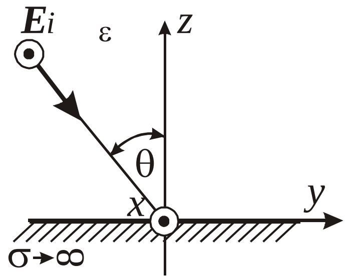
Између две паралелне проводне равни нултог потенцијала налази се наелектрисање запреминске густине која се мења дуж z-осе по закону $\rho(z) = \rho_0 \dfrac{z}{d}$. Интеграцијом Пуасонове једначине одредити потенцијал.

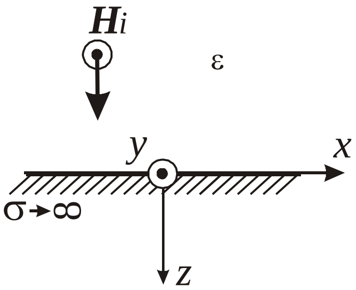
Тринаеста недеља - Равански таласи

► Равански таласи

Задатак 41

Раван линијски поларизован ТЕМ талас, $E_{eff} = E$ и таласне дужине λ, наилази под углом θ у односу на нормалу на неограничену савршено проводну раван. Одредити резултујуће електрично и магнетно поље изнад равни, површинску густину наелектрисања на равни и вектор површинске густине струје на њој.





Задатак 42

Простопериодичан ТЕМ талас, линијски поларизован, фреквенције f и ефективне вредности магнетног поља H_0, наилази управно на савршено проводну раван. Одредити површинску густину наелектрисања и вектор површинске густине струје индуковане на њој.

Четрнаеста недеља - Равански таласи

► Френелови коефицијенти

Задатак 43

Раван униформан линијски поларизован ТЕМ талас наилази из вакуума нормално на савршено проводну раван. Учестаност, f, и ефективна вредност електричног поља, E, овог таласа су непознате. За одређивање ових двеју величина употребљена је мала равна квадратна контура странице $a = 1\text{cm}$. При томе је контура оријентисана тако да се у њој индукује максимална могућа електромоторна сила. На висини $h = 1\text{m}$, ефективна вредност индуковане електромоторне силе у контури је $\varepsilon = 0.21\mu\text{V}$. Мерењем је установљено да је минимално растојање две тачке у којима је индукована електромоторна сила максимална $\Delta h_{\min} = 1.5\text{m}$, при чему се ове тачке налазе на оси која је нормална на савршено проводну раван. Израчунати:

а) учестаност

б) ефективну вредност електричног поља инцидентног таласа.

Задатак 44

Одредити Френелове коефицијенте за равански, униформни, нормално поларизован ТЕМ талас који наилази под углом $\theta = 60^\circ$ на раздвојну површину две хомогене средине, како је то приказано на Слици. Вредности релативних диелектричних константи прве и друге средине су $\varepsilon_{r1} = 1$ и $\varepsilon_{r2} = 4$, респективно, док су њихове магнетне пермеабилности исте и приближно једнаке магнетној пермеабилности вакуума, тј. $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$.