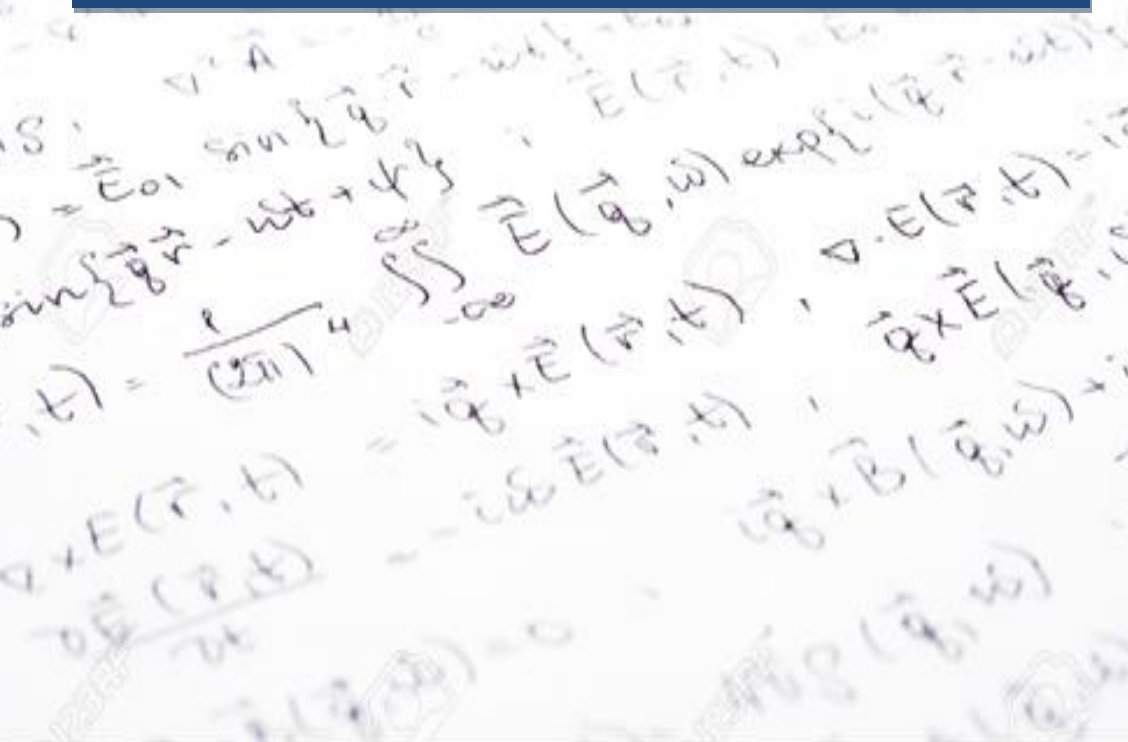


Универзитет у Нишу
Електронски факултет у Нишу
Катедра за теоријску електротехнику

Електромагнетика – одабрана поглавља
рачунске вежбе – смер УС



Предметни професор: др Злата Цветковић
e-mail: zlata.cvetkovic@elfak.ni.ac.rs

Предметни асистент: др Мирјана Перић
e-mail: mirjana.peric@elfak.ni.ac.rs

web: <http://em.elfak.ni.ac.rs>

Ниш, 2017/18

**Рачунске вежбе из Електромагнетике – одабрана поглавља
- Оквирни план рада -**

Број недеље	Датум	Програм
1	23.10.	Увод – Максвелове једначине и њихова примена (обнављање градива из ОЕ1 и ОЕ2)
2	30.10.	Закривљени координатни системи Оператори просторног диференцирања Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена
3	06.11.	Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена Једначина континуитета
4	13.11.	Простопериодични вектори Комплексни вектори
5	20.11.	Гранични услови Електромагнетне особине средина
6	27.11.	Електромагнетне особине средина Поинтингова теорема
	02.12.	Први колоквијум (предлог)
7	04.12.	Потенцијали у закашњењу
8	11.12.	Теорема лика у равном огледалу
9	18.12.	Модификована теорема лика Теорема лика у цилиндричном огледалу
10	25.12.	Теорема лика у цилиндричном огледалу Лапласова једначина
11	08.01.	Лапласова и Пуасонова једначина
12	15.01.	Равански таласи
	20.01.	Други колоквијум (предлог)

Прва недеља - Увод

► Максвелове једначине и њихова примена (обнављање градива из Основа електротехнике)

Задатак 1

Одредити јачину електричног поља, електричну индукцију и потенцијал у околини:

- усамљеног тачкастог сталног наелектрисања Q ;
- правог неограниченог линијског наелектрисања сталне подужне густине наелектрисања q' .

Задатак 2

Одредити јачину магнетног поља и магнетну индукцију у околини правог и дугог линеичног проводника оптицаног струјом I .

Задатак 3

Одредити електрично поље неограничене равни оптерећене равномерно по површини наелектрисањем сталне површинске густине η .

Задатак 4

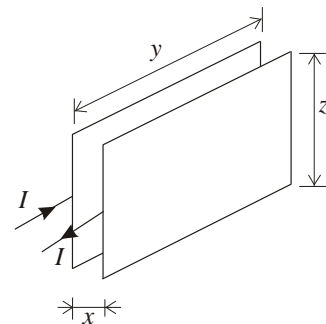
Одредити електрично поље две паралелне неограничене равни оптерећене равномерно по површини наелектрисањима исте површинске густине η , али супротног знака.

Задатак 5

Неограничена раван оптицана је сталном струјом површинске густине J_s . Одредити јачину магнетног поља у околини равни.

Задатак 6

Кроз паралелне проводне траке протиче струја I истог интензитета али супротног смера сталне површинске густине J_s . Одредити магнетну енергију између трака ($x \ll y, z$), Сл.6.



Сл.6

Друга недеља - Увод

- Закривљени координатни системи
- Оператори просторног диференцирања
- Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена

Закривљени координатни системи

Вредности Ламеових коефицијената:

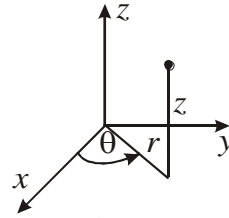
- правоугли систем ($u = x, v = y, w = z$): $h_x = h_y = h_z = 1$;

б) цилиндрични систем ($u = r, v = \theta, w = z$):

$$h_r = 1,$$

$$h_\theta = r,$$

$$h_z = 1 ;$$

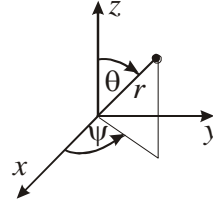


в) сферни систем ($u = r, v = \theta, w = \psi$):

$$h_r = 1,$$

$$h_\theta = r,$$

$$h_\psi = r \sin \theta .$$



Оператори просторног диференцирања

а) **градијент**, примењује се на скаларну функцију и даје векторску величину и одређује као:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{h_u \partial u} \hat{u} + \frac{\partial \varphi}{h_v \partial v} \hat{v} + \frac{\partial \varphi}{h_w \partial w} \hat{w};$$

б) **дивергенција**, примењује се на векторску функцију и даје скалар.

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v A_w) \right];$$

в) **ротор**, примењује се на векторску функцију и даје вектор

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix};$$

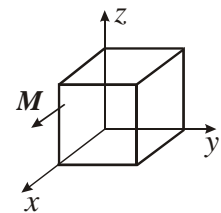
г) **Лапласијан скалар**, примењује се на скаларну функцију и даје скалар

$$\Delta \varphi = \text{div grad} \varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right];$$

д) **Лапласијан вектор**, примењује се на векторску функцију и даје вектор $\Delta \mathbf{A} = -\text{rot rot} \mathbf{A} + \text{grad div} \mathbf{A}$.

Задатак 7

Коцка израђена од феромагнетног материјала дужине странице a налази се у ваздуху, Сл.1. Вектор густине магнетног момента \mathbf{M} у коцки је $\mathbf{M} = M_0 \frac{z}{a} \hat{x}$. Одредити расподелу Амперових струја коцке.

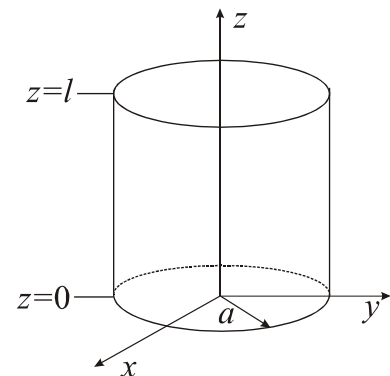


Сл.1

Задатак 8

У ваљку од диелектрика полупречника a и висине l који се налази у вакууму (Сл.2), постоји заостала поларизација, при чему је вектор поларизације:

$$\vec{P} = P_0 \left[\frac{r^2}{a^2} \hat{r} + \left(1 + \frac{r}{a} \cos \theta \right) \hat{\theta} + \left(l \frac{r}{a^2} \cos \theta \right) \hat{z} \right], P_0 = \text{const.}$$



Сл.2

Одредити расподелу запреминског и површинског везаног наелектрисања ваљка.

Трећа недеља - Једначина континуитета

- ▶ Диференцијални облик Максвелових једначина и њихова примена
- ▶ Једначина континуитета

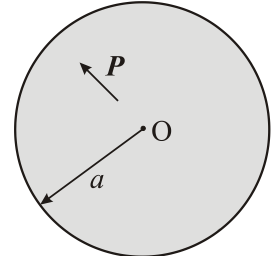
Задатак 9

1. У лопти од диелектрика полупречника a , Сл. 1, постоји заостала поларизација. Вектор поларизације је дат изразом:

$$\mathbf{P} = P_0 \frac{r}{a} \hat{r},$$

где је P_0 константа, а r је растојање од центра лопте. Са \hat{r} је обележен јединични вектор у радијалном правцу сферног координатног система чији је почетак у центру лопте. Лопта се налази у ваздуху.

Одредити расподелу запреминског и површинског везаног наелектрисања лопте.



Сл.1

Задатак 10

Сферни кондензатор полупречника електрода a и b , испуњен је диелектриком специфичне проводности $\sigma(\theta, \psi) = \sigma_0(2 + \sin \psi) \sin \theta$. Одредити проводност кондензатора.

Задатак 11

Коаксијални кабл полупречника проводника a и b ($a < b$) и дужине L испуњен је несавршеним диелектриком ($\epsilon_0, \mu_0, \sigma \neq 0$) при чему је $\sigma(z) = \sigma_0 \frac{z}{a} \exp\left(\frac{z^2}{L^2}\right)$, где је $\sigma_0 = \text{const}$ и $0 \leq z \leq L$. Кабл је на једном крају прикључен на идеални генератор U , а на другом крају је отворен. Одредити подужну проводност кабла и расподелу струје у диелектрику.

Четврта недеља - Простопериодични вектори

- ▶ Простопериодични вектори
- ▶ Комплексни вектори

Простопериодичне векторске величине

Простопериодична векторска величина је вектор чије су све три компоненте простопериодичне величине исте учестаности, али у општем случају, различитих ефективних вредности и различитих почетних фаза:

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y} + a_z(t)\hat{z}$$

$$a_x(t) = A_x \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_x);$$

$$a_y(t) = A_y \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_y);$$

$$a_z(t) = A_z \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_z).$$

Интензитет вектора $\mathbf{a}(t)$ је $|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}$.

Ефективна вредност вектора је $A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)) dt} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

Комплексни вектори

$$\underline{A}_x = A_x e^{j\theta_x}; \underline{A}_y = A_y e^{j\theta_y}; \underline{A}_z = A_z e^{j\theta_z}$$

$$\underline{A} = \underline{A}_x \hat{x} + \underline{A}_y \hat{y} + \underline{A}_z \hat{z}$$

Вектор у општем случају мења интензитет, правац и смер. У општем случају се каже да је вектор (односно поље које тај вектор описује) елиптички поларизован. Уколико је тренутни интензитет вектора $\mathbf{a}(t)$ константан, а вектор мења само правац и смер, каже се да је вектор кружно поларизован. Уколико је правац вектора $\mathbf{a}(t)$ константан, док вектор мења интензитет и смер, каже се да је вектор линијски поларизован.

Задатак 12

За комплексни представник вектора простопериодичног електричног поља $\underline{E}(t)$,

$$\underline{E} = j4\hat{x} + 5\hat{y} + j3\hat{z}$$

одредити тренутну вредност, минималну и максималну вредност, и поларизацију вектора $\underline{E}(t)$.

Задатак 13

Одредити тренутну, максималну и ефективну вредност комплексног вектора датог изразом

$$\underline{A} = j\sqrt{8}\hat{x} + j\sqrt{2}\hat{y} + j2\hat{z}. \text{ Како је вектор поларизован?}$$

Задатак 14

Комплексни представник вектора јачне електричног поља, $\underline{E}(t)$, је

$$\underline{E} = (4\hat{x} + \underline{K}\hat{y} + 3\hat{z}) \text{ V/m}.$$

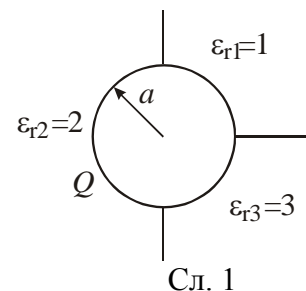
- Одредити комплексну константу \underline{K} тако да вектор \underline{E} буде кружно поларизован;
- На основу одређене вредности константе \underline{K} , израчунати максималну, минималну и ефективну вредност вектора \underline{E} .

Пета недеља - Гранични услови и Електромагнетне особине средина

- ▶ Гранични услови
- ▶ Електромагнетне особине средина

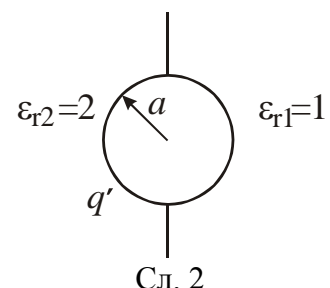
Задатак 15

Метална лопта полупречника a , оптерећена слободним наелектрисањем Q , налази се у трослојној секторалној средини (Сл.1). Одредити потенцијал, јачину електричног поља у околини лопте, као и њену капацитивност.



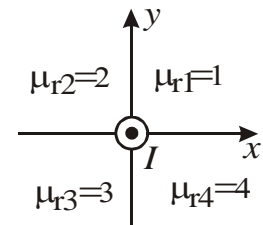
Задатак 16

Метални цилиндар полупречника a оптерећен је сталним подужним наелектрисањем q' и налази се у двослојној средини (Сл.2). Одредити потенцијал и јачину електричног поља у околини цилиндра.



Задатак 17

Неограничени проводник, кроз који протиче стална струја I , налази се у четворослојној секторалној средини, слика 3. Одредити јачину магнетног поља, магнетну индукцију и магнетни вектор потенцијал у околини проводника.



Сл. 3

Задатак 18

Извести израз за адмитансу кондензатора у коме се налази хомоген несавршен диелектрик диелектричне константе ϵ и специфичне проводности σ .

Задатак 19

Одредити резонантну учестаност редног LC кола када је средина у кондензатору нелинеарна у електричном смислу. Капацитивност кондензатора, када је у њему средина ваздух, износи C_0 , а хистерезисна петља се може апроксимирати помоћу елипсе, тако да је $\underline{\epsilon} = \epsilon_1 - j\epsilon_2$.

Шеста недеља - Електромагнетне особине средина и Поинтингова теорема

- ▶ Електромагнетне особине средина
- ▶ Поинтингова теорема

Задатак 20

Одредити фактор добротe једнослојног соленоидног намотаја велике дужине d и кружног попречног пресека полупречника a ($a \ll d$), када је на соленоид густо и равномерно намотано N завојака танке жице и када је хистерезисна петља средине у соленоиду апроксимирана помоћу елипсе тако да је њена привидна магнетна пропустљивост комплексна облика $\underline{\mu} = \mu_1 - j\mu_2$.

Задатак 21

На средини веома дугачког соленоида, кружног попречног пресека b и подужне густине навојака N' , постављен је танак кружни диск полупречника a ($a < b$) и дебљине δ . Средина је ваздух, а струја кроз кабл

$$i(t) = \begin{cases} I_0 e^{-t/\tau}, & t \geq 0 \\ I_0, & t < 0 \end{cases}$$

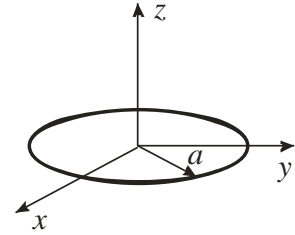
где су I_0 и τ позитивне константе. Диск је начињен од материјала специфичне проводности σ и пермеабилности μ_0 . Занемарити магнетно поље индукованих струја. Одредити укупан рад који се претвори у топлоту у интервалу $t \in [0, \tau]$.

Седма недеља - Потенцијали у закашњењу

► Потенцијали у закашњењу

Задатак 22

Кроз танку проводну контуру полупречника a , протиче струја високе учестаности $i(t) = I_m \cos \omega t$, где је $I_m = \text{const}$. Одредити подужну количину електрицитета на њој, комплексни електрични скалар и магнетни вектор потенцијал, векторе магнетне индукције и електричног поља дуж z -осе.

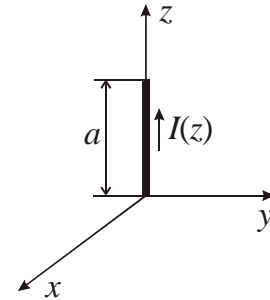


Задатак 23

Дуж проводне нити, дужине a , високофреквентна простопериодична струја се мења по закону

$$i(z, t) = \sqrt{2} I_0 \frac{a-z}{a} \cos(\omega t - k_0 z),$$

где је I_0 константа, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ и $0 \leq z \leq a$. Одредити комплексни представник задате струје $\underline{I}(z)$, расподелу наелектрисања дуж нити проводника и индуковано електрично поље дуж z -осе за $z > a$.



Осма недеља - Метод огледања

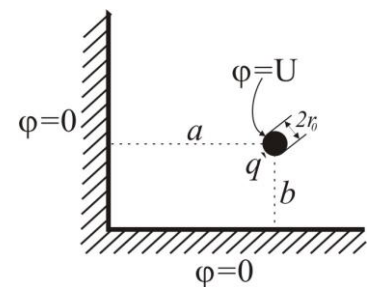
► Теорема лика у равном огледалу

Задатак 24

Одредити потенцијал који ствара стално подужно наелектрисање q' постављено на висини h паралелно површини проводне равни нултог потенцијала. Наћи његову капацитивност.

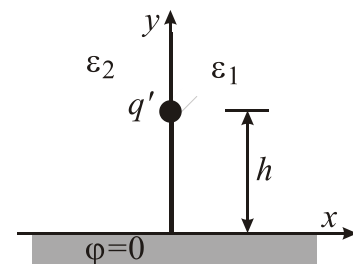
Задатак 25

Применом методе огледања одредити подужну капацитивност једножичног вода унутар угаоника попречног пресека приказаног на слици, под условом да је $a, b \gg r_0$.



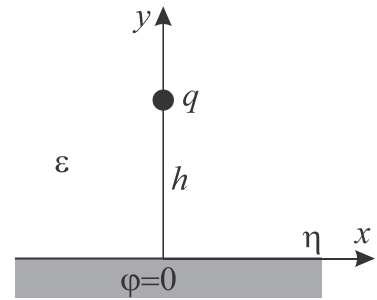
Задатак 26

Проводник оптерећен сталним наелектрисањем q' налази се у двослојној средини на висини h изнад савршено проводне неограничене равни. Проводна равна се налази на нултом потенцијалу. Одредити потенцијал и јачину електричног поља у његовој околини.



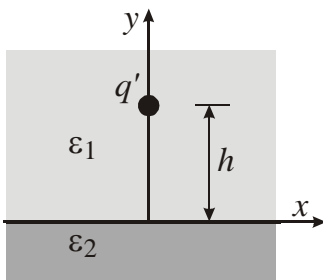
Задатак 27

Позитивно оптерећена честица наелектрисања q налази се на висини h изнад веома велике металне плоче нултог потенцијала. Ако је плоча оптерећена позитивним наелектрисањем сталне површинске густине η , одредити силу на честицу.



Девета недеља - Метод огледања

- ▶ Модификована теорема лика
- ▶ Теорема лика у цилиндричном огледалу

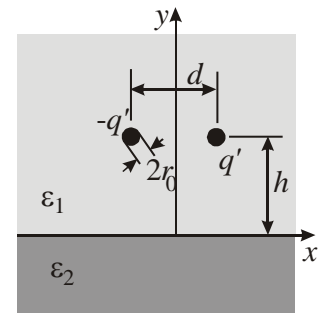


Задатак 28

Проводник оптерећен сталним наелектрисањем q' налази се у средини ϵ_1 на висини h изнад развојне површине. Одредити силу по јединици дужине која делује на проводник.

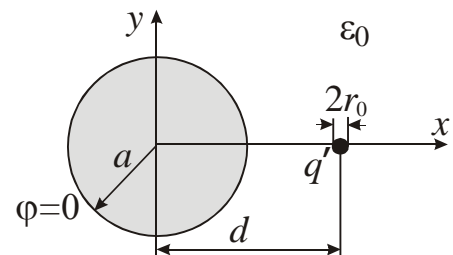
Задатак 29

Одредити подужну капацитивност двојичног вода постављеног у средини ϵ_1 на висини h изнад развојне површине два диелектрика.



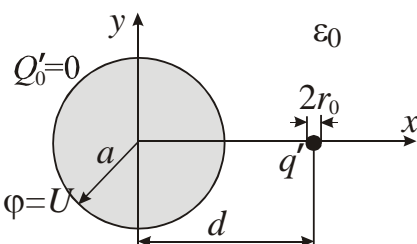
Задатак 30

Поред цилиндричног проводника велике дужине и кружног попречног пресека полупречника a , налази се стално подужно наелектрисање q' на растојању $d > a$. Цилиндар је на нултом потенцијалу, а систем се налази у ваздуху. Одредити потенцијал у околини цилиндра.



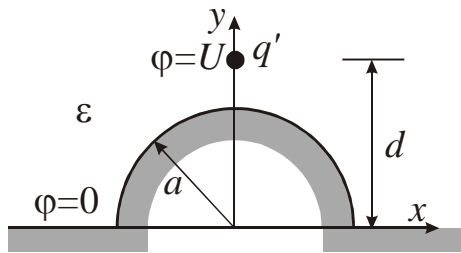
Десета недеља - Метод огледања

- ▶ Теорема лика у цилиндричном огледалу
- ▶ Лапласова и Пуасонова једначина



Задатак 31

Поред неутралног цилиндричног проводника велике дужине и кружног попречног пресека полупречника a , оптерећеног наелектрисањем $-q'$, налази се једножични вод на растојању $d > a$. Цилиндар је на потенцијалу $\phi = U$, а систем се налази у ваздуху. Одредити капацитивност једножичног вода.

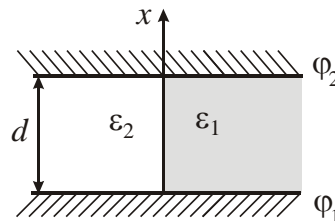


Задатак 32

Одредити подужну капацитивност једножичног вода, полупречника r_0 ($r_0 \ll a, d$), постављеног изнад проводне равни нултог потенцијала. На равни је полуцилиндрична избочина полупречника $a < d$.

Задатак 33

Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у равном кондензатору са двослојном средином, Слика, када је ивични ефекат занемарив и електроде кондензатора на потенцијалима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = U$.

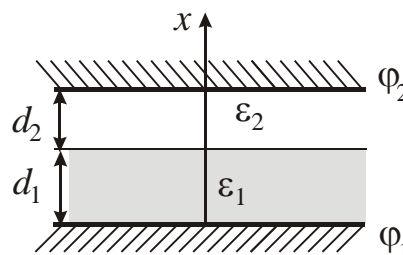


Једанаеста недеља - Лапласова и Пуасонова једначина

- ▶ Лапласова једначина
- ▶ Пуасонова једначина

Задатак 34

Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у равном кондензатору са двослојном средином, Слика, када је ивични ефекат занемарив и електроде кондензатора на потенцијалима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = U$.

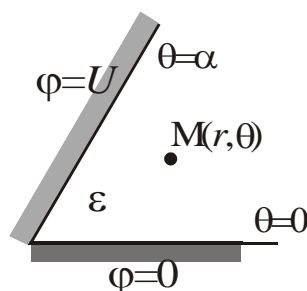


Задатак 35

Унутрашњи проводник коаксијалног кабла, полупречника a , налази се на потенцијалу нула, а спољашњи проводник, полупречника b , на потенцијалу U . Одредити расподелу потенцијала и вектора јачине електричног поља у каблу, полазећи од Лапласове једначине.

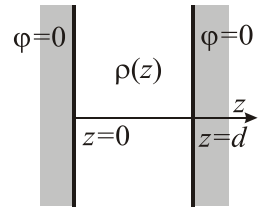
Задатак 36

Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал и јачину електричног поља за систем са Сликe, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.



Задатак 37

Између две паралелне проводне равни нултог потенцијала налази се наелектрисање запреминске густине која се мења дуж z -осе по закону $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{d}$. Интеграцијом Пуасонове једначине одредити потенцијал.

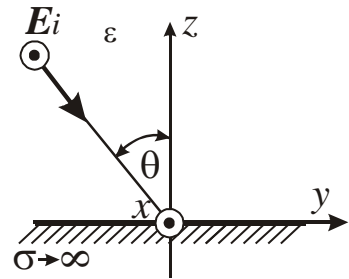


Дванаеста недеља - Равански таласи

► Равански таласи

Задатак 38

Раван линијски поларизован ТЕМ талас, $E_{eff} = E$ и таласне дужине λ , наилази под углом θ у односу на нормалу на неограничену савршено проводну раван. Одредити резултујуће електрично и магнетно поље изнад равни, површинску густину наелектрисања на равни и вектор површинске густине струје на њој.



Задатак 39

Раван униформан линијски поларизован ТЕМ талас наилази из вакуума нормално на савршено проводну раван. Учестаност, f , и ефективна вредност електричног поља, E , овог таласа су непознате. За одређивање ових двеју величина употребљена је мала равна квадратна контура странице $a = 1\text{cm}$. При томе је контура оријентисана тако да се у њој индукује максимална могућа електромоторна сила. На висини $h = 1\text{m}$, ефективна вредност индуковане електромоторне силе у контури је $\varepsilon = 0.21\mu\text{V}$. Мерењем је установљено да је минимално растојање две тачке у којима је индукована електромоторна сила максимална $\Delta h_{\min} = 1.5\text{m}$, при чему се ове тачке налазе на оси која је нормална на савршено проводну раван. Израчунати:

- учестаност
- ефективну вредност електричног поља инцидентног таласа.